

LOGIKA

FORMA ZDANIOWA

SPÓJNIKI ZDANIOWE

Jest wiele zwrotów logicznych w języku, ale te najważniejsze można opisać za pomocą następujących spójników zdaniowych.

- **Negacja**. Dla wygody, tu piszemy $\neg p$ zamiast „Nieprawda, że p .”

Negacja zdania p jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy p jest fałszywe; w przeciwnym przypadku (gdy p jest prawdziwe) jest fałszywa.

- **Koniunkcja** $p \& q = p \text{ i } q$.

Koniunkcja jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba zdania są prawdziwe; w pozostałych przypadkach fałszywa.

Koniunkcja opisuje też takie zwroty jak: oraz, a, ale, chociaż, pomimo, jednak,...

- **Alternatywa** $p \vee q = p \text{ lub } q$.

Alternatywa jest fałszywa wtedy i tylko wtedy, gdy oba zdania są fałszywe; w pozostałych przypadkach prawdziwa.

- **Implikacja** $p \rightarrow q = \text{Jeśli } p \text{ to } q$.

UWAGA Implikacja opisuje też takie zwroty jak

q jeśli p; q gdyż p; q ponieważ p.

Kolejność zdań p, q jest tu odwrócona.

Implikacja $p \rightarrow q$ jest fałszywa wtedy i tylko wtedy, gdy p jest prawdziwe a q fałszywe; w pozostałych przypadkach prawdziwa.

- **Równoważność** $p \leftrightarrow q = p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } q$.

Równoważność jest fałszywa wtedy i tylko wtedy, gdy jedno zdanie jest prawdziwe a drugie fałszywe; w pozostałych przypadkach prawdziwa.

FORMY ZDANIOWE

Logiczność wypowiedzi jest związana z jej formą a nie treścią. Dlatego w logicznej analizie tekstu, podstawową sprawą jest umiejętność zidentyfikowania formy zdania.

W tym celu, najpierw należy ustalić który spójnik jest **główny**.

PRZYKŁAD I *Jeśli jesteś ambitny i pracujesz, to masz sukcesy.*

W tym zdaniu, głównym spójnikiem jest implikacja „jeśli ... to ...”

Zatem, jego forma jest taka

$$(p \ \& \ q) \rightarrow r$$

(Tutaj, p=Jesteś ambitny; q=Pracujesz; r=Masz sukcesy.)

PRZYKŁAD II *Jesteś ambitny i jeśli pracujesz to masz sukcesy.*

W tym zdaniu, spójnik główny to koniunkcja „i”. Dlatego, jego forma jest inna (choć zdania proste są te same). Wygląda ona tak.

$$p \ \& \ (q \rightarrow r)$$

PRAWA LOGICZNE

Należy podkreślić różnicę między konkretnym zdaniem a jego formą. Konkretnie zdanie coś znaczy i jest albo prawdziwe albo fałszywe. Na przykład, zdanie *2 maja 2020 roku była sobota lub niedziela.*

jest prawdziwe. Natomiast jego forma $p \vee q$ nic nie znaczy, bo p, q to nie są zdania, ale zmienne zdaniowe, czyli miejsca, w które można **wstawić** konkretne zdania. Wtedy ta forma staje się zdaniem prawdziwym lub fałszywym; zależnie od tego, co wstawimy. Jeśli za p wstawimy zdanie $2+2=5$, za q wstawimy zdanie $2+2=6$; to $p \vee q$ staje się zdaniem fałszywym.

Jednak są takie **formy**, które nigdy (przy żadnym podstawieniu) nie staną się zdaniami fałszywymi. Nazywamy je **prawami logicznymi**.

Mówimy, że prawda/fałsz to **wartości logiczne** i oznaczamy symbolami:

$$1 \text{ (=prawda)}, \ 0 \text{ (=fałsz)}.$$

DEFINICJA Prawo logiczne to forma która ma wartość 1 przy każdym podstawieniu za zmienne p, q, r wartości logicznych.

PRZYKŁAD III Forma $p \vee \neg p$ jest prawem logicznym, bo w każdym podstawieniu całe wyrażenie jest prawdziwe. Istotnie,

1. $p = 1$. Wtedy $p \vee \neg p = 1 \vee (\neg 1) = 1 \vee 0 = 1$.
2. $p = 0$. Wtedy $p \vee \neg p = 0 \vee (\neg 0) = 0 \vee 1 = 1$.

PRZYKŁAD IV Forma $(p \vee q) \rightarrow p$ nie jest prawem logicznym, bo w pewnym podstawieniu całe wyrażenie jest fałszywe. Mianowicie, gdy $p = 0$, $q = 1$, to

$$(p \vee q) \rightarrow p = (0 \vee 1) \rightarrow 0 = 1 \rightarrow 0 = 0.$$

PRZYKŁAD V Forma $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ jest prawem.

DOWÓD: Załóżmy, że jednak tak nie jest i w pewnym podstawieniu ta forma jest fałszywa. Jest to implikacja, więc

jej poprzednik $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) = 1$,

a jej następnik $p \rightarrow r = 0$.

Stąd, że $p \rightarrow r = 0$, dostajemy, że **$p=1$** oraz **$r = 0$** .

Wyrażenie $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ jest koniunkcją i jest 1, więc

zarówno $p \rightarrow q = 1$ jak i $q \rightarrow r = 1$.

Stąd, że $p \rightarrow q = 1$ wynika, że $q = 1$ (bo już wiemy, że $p = 1$).

A stąd, że $q \rightarrow r = 1$ wynika, że **$r = 1$** (bo $q = 1$).

To, że $r = 1$ jest sprzeczne z wcześniejszym ustaleniem, że r musi być 0.

Założenie, że to wyrażenie przy pewnym podstawieniu jest fałszywe prowadzi do sprzeczności.

Zatem jest ono prawdziwe przy każdym podstawieniu, czyli jest prawem logicznym.